Serie 1 – Parte III

Problema 1: Basándose en leyes físicas fundamentales haga un Diagrama de Bloques de los siguientes sistemas físicos. Siempre que sea posible, evite la inclusión de bloques derivadores.

a. Sistema Mecánico rotacional

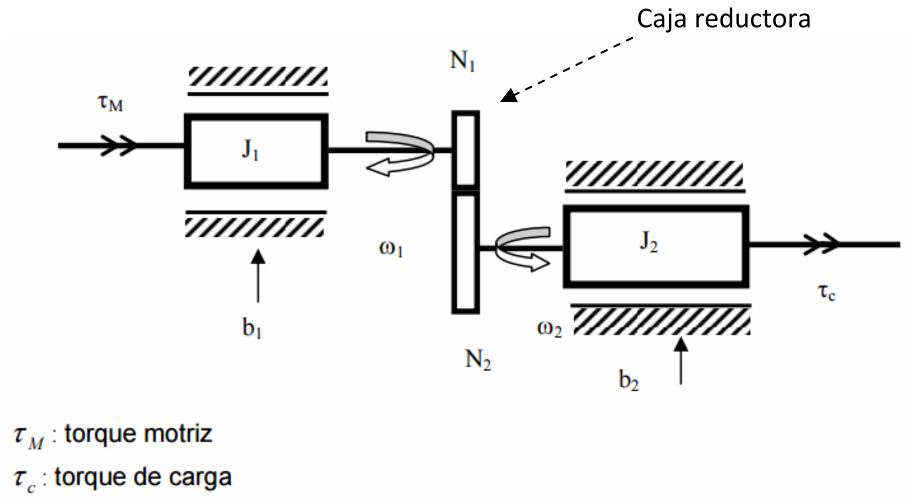

Figura 1: Sistema Mecánico Rotacional

Para la obtención del modelo debemos plantear la Segunda Ley de Newton para sistemas rotaciones en las dos inercias y la relación entrada-salida de la caja reductora.

- Inercia J_1

  El diagrama de cuerpo libre de la inercia J_1 se muestra en la Figura 2.

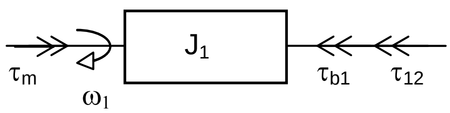

Figura 2: Diagrama de cuerpo libre de la inercia J_1

τ_{b1} es el torque de rozamiento, que asumiremos proporcional a la velocidad angular ω_1, es decir: $\tau_{b1} = b_1\,\omega_1$, y que se opone al movimiento (torque resistente).

τ_{12} es el torque que sobre el eje de velocidad ω_1 ejerce la parte derecha del sistema (reductor + inercia J_2 + rozamiento b_2 + torque de carga), y que resulta un torque resistente (opuesto al motriz).

Por 2da. Ley de Newton resulta

$$\begin{aligned} J_1\dot{\omega}_1 &= \tau_m - \tau_{b1} - \tau_{12} \\ &= \tau_m - b_1\omega_1 - \tau_{12} \end{aligned} \tag{1}$$

- Inercia J_2

  El diagrama de cuerpo libre de la inercia J_2 se muestra en la Figura 3.

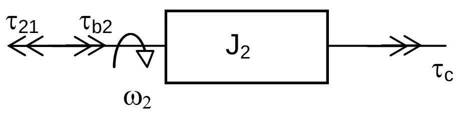

Figura 3: Diagrama de cuerpo libre de la inercia J_2

τ_{b2} es el torque de rozamiento, que asumiremos proporcional a la velocidad angular ω_2, es decir: $\tau_{b2} = b_2\,\omega_2$, y que se opone al movimiento (torque resistente).

τ_{21} es el torque que sobre el eje de velocidad ω_2 ejerce la parte izquierda del sistema (reductor + inercia J_1 + rozamiento b_1 + torque motriz), y que resulta un torque motriz para la inercia J_2.

Por 2da. Ley de Newton resulta

$$\begin{aligned} J_2\dot{\omega}_2 &= \tau_{21} - \tau_{b2} - \tau_c \\ &= \tau_{21} - b_2\omega_2 - \tau_c \end{aligned} \qquad (2)$$

- Caja reductora

Una vista transversal de la caja de engranajes se representa en la Figura 4

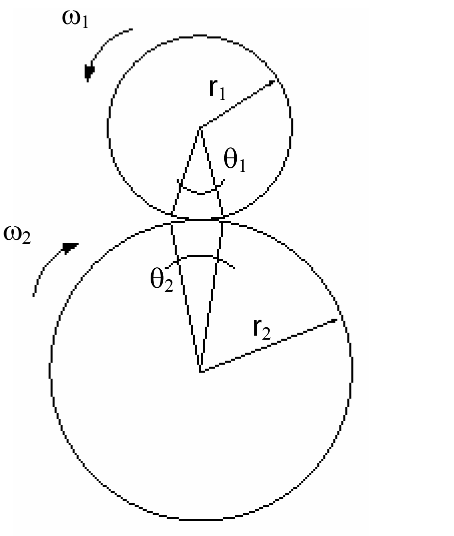

Figura 4: Vista transversal de la caja de engranajes.

Se verifica que el arco recorrido por la parte de velocidad ω_1 cuando gira un ángulo θ_1 es igual al arco recorrido por la parte de velocidad ω_2 cuando gira el correspondiente ángulo θ_2, ya que el tamaño de los engranajes debe ser necesariamente el mismo. Es decir:

$$\begin{aligned} &\theta_1 r_1 = \theta_2 r_2 \\ &\theta_1 2\pi r_1 = \theta_2 2\pi r_2 \\ &\theta_1 k N_1 = \theta_2 k N_2 \Rightarrow \theta_1 = \frac{N_2}{N_1}\theta_2 \end{aligned} \qquad (3)$$

donde en el paso a la tercera línea se ha considerado que la longitud de las circunferencias de ambos lados son proporcionales a los respectivos números de dientes N_1 y N_2.

Derivando la ecuación (3) respecto al tiempo se obtiene la siguiente relación entre las velocidades

$$\omega_1 = \frac{N_2}{N_1}\omega_2 \qquad (4)$$

Vemos que resulta una relación estática entre ambas velocidades, lo que corresponde a un acople rígido entre las dos inercias. Para ver como se transmite el torque a través de la caja de engranajes supondremos que no hay pérdida de potencia, es decir que la potencia mecánica de entrada es igual a la potencia mecánica de salida. Es decir

$$\begin{aligned} &\tau_{12}\omega_1 = \tau_{21}\omega_2 \Rightarrow \tau_{12} = \frac{\omega_2}{\omega_1}\tau_{21} = \frac{N_1}{N_2}\tau_{21} \\ &\tau_{12} = \frac{N_1}{N_2}\tau_{21} \end{aligned} \qquad (5)$$

donde hemos usado la relación (4) entre las velocidades.

Las ecuaciones (1), (2), (4) y (5) describen completamente la dinámica del sistema. Para construir el diagrama de bloques despejamos de (1) la derivada de mayor orden de ω_1 obteniendo:

$$\dot{\omega}_1 = \frac{1}{J_1}\left(\tau_m - b_1\omega_1 - \tau_{12}\right) \tag{6}$$

Vemos que necesitamos τ_{12} , que puede calcularse a partir de τ_{21} usando (5). A su vez τ_{21} puede despejarse de (2), resultando

$$\tau_{21} = b_2\omega_2 + \tau_c + J_2\dot{\omega}_2 \tag{7}$$

Notar que, al obtener ω_1 integrando en (6), automáticamente queda determinada ω_2 por la relación estática (4) y su derivada (derivando (4) se obtiene la misma relación entre las derivadas de las velocidades).

Finalmente, el diagrama de bloques se muestra en la Figura 5.

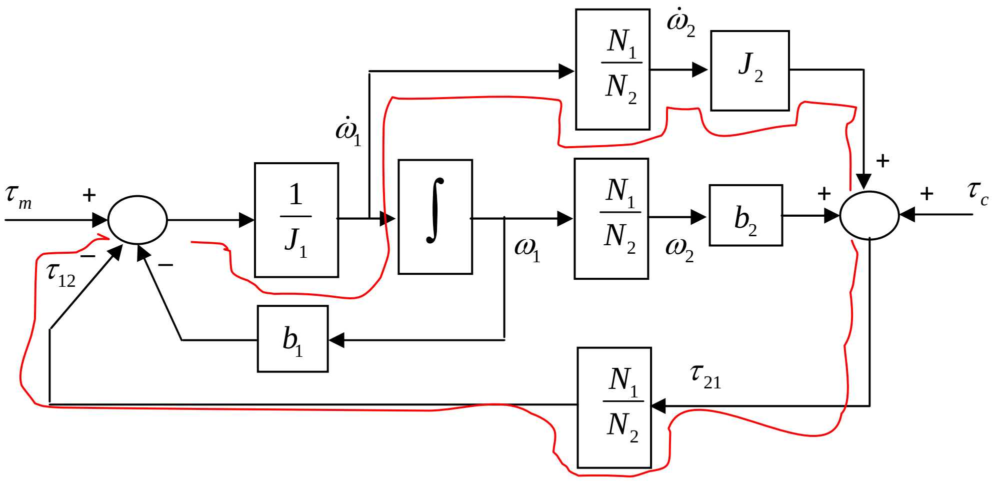

Figura 5: Diagrama de bloques.

Notar que si bien habría dos almacenadores de energía, las dos inercias, al estar acoplados rígidamente a través de la caja de reducción ideal, el diagrama de bloques resulta con un solo integrador y el sistema resulta de primer orden.

Notar que el camino cerrado en rojo está conformado únicamente por ganancias estáticas. Esto se denomina un **lazo algebraico**, y constituye un problema para la simulación, ya que para poder computar el valor de una de las variables del lazo en un instante es necesario conocer el valor de esa variable en el mismo instante. Esto puede solucionarse manipulando los bloques con las reglas de la denominada **álgebra de bloques**, para eliminar el lazo. Estas reglas se verán más adelante en el curso.